数III

平面上の曲線

1. 放物線の性質

$x^2=4py$	$y^2=4px$
軸　$x=0$	軸　$y=0$
焦点 $(0,\ p)$	焦点 $(p,\ 0)$
準線 $y=-p$	準線 $x=-p$

check 1　放物線 $y^2=-8x$ について，焦点と準線を求め，その概形をかけ。

2. 楕円の性質

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0$ のとき$)$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0$ のとき$)$
頂点 $(\pm a,\ 0),\ (0,\ \pm b)$	頂点 $(\pm a,\ 0),\ (0,\ \pm b)$
長軸の長さ $2a$	長軸の長さ $2b$
短軸の長さ $2b$	短軸の長さ $2a$
焦点 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$	焦点 $(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2})$
2つの焦点からの距離の和 $2a$	2つの焦点からの距離の和 $2b$

check 2　楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ について，焦点を求め，その概形をかけ。また，長軸，短軸の長さを求めよ。

3. 双曲線の性質

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$
頂点 $(\pm a,\ 0)$	頂点 $(0,\ \pm b)$
焦点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$	焦点 $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$
2つの焦点からの距離の差 $2a$	2つの焦点からの距離の差 $2b$

漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

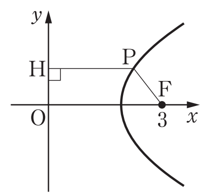
check 3　双曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ について，頂点と焦点および漸近線の方程式を求め，その概形をかけ。

4. 2次曲線と離心率

定点Fからの距離PFと定直線 l からの距離PHの比の値 e が一定である点Pの軌跡は，Fを1つの焦点とする2次曲線であり

$0<e<1$ のとき	楕円
$e=1$ のとき	放物線
$e>1$ のとき	双曲線

check 4　点Pについて，点F(3, 0)からの距離PFと，y 軸からの距離PHの比の値 $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が次の値であるとき，点Pの軌跡を求めよ。



(1)　$e=\dfrac{1}{2}$

(2)　$e=2$

5. 直交座標と極座標

点Pの直交座標が $(x,\ y)$，極座標が $(r,\ \theta)$ であるとき

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

check 5　直交座標が $(-\sqrt{3},\ 1)$ である点Pの極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

複素数平面

6. 共役な複素数の性質

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ (2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

(3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ (4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

(5) $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$

7. 複素数の極形式

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ （a，b は実数）

ただし，$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arg z$

check 7 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $1+i$

(2) $-\sqrt{3}+3i$

(3) $-4i$

8. 複素数の積と商

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

(1) 積 $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

(2) 商 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$

check 8 $z_1=1+i$，$z_2=-\sqrt{3}+3i$ のとき，次の複素数を極形式で表せ。

(1) z_1z_2

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

9. ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

check 9 $(-\sqrt{3}+3i)^6$ を計算せよ。

10. 複素数と角

異なる 3 点 P(z_1)，Q(z_2)，R(z_3) に対して

$\angle\mathrm{QPR}=\arg\left(\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$

check 10 複素数 $3+i$，$5-2i$，$4+6i$ が表す点をそれぞれ P，Q，R とするとき，∠QPR を求めよ。

11. 一直線上にある条件，垂直に交わる条件

3 点 P，Q，R が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が実数

2 直線 PQ，PR が垂直に交わる $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が純虚数

check 11 3 点 P$(2+6i)$，Q(5)，R$(x+4i)$ について，次の条件を満たすような実数 x の値を求めよ。

(1) 3 点 P，Q，R が一直線上にある。

(2) 2 直線 PQ，PR が垂直に交わる。

関数と極限

12. 数列の収束・発散

収束……$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ （一定の値 α に収束）

発散
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ （正の無限大に発散）
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ （負の無限大に発散）
- 振動 （極限はない）

13. 数列の極限値と四則

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$ （k は定数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta\neq0$）

check 13 次の極限を調べよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-n^2)$

III

14. 数列の極限と大小関係

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において

$a_n \leqq b_n \leqq c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$ ならば，$\{b_n\}$ も収束して

$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$　　（はさみうちの原理）

check 14　θ を定数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta$ を求めよ。

15. 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$r\leqq -1$ のとき　$\{r^n\}$ は振動し，$\lim_{n\to\infty} r^n$ は存在しない。

check 15　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-4^n}{3^n+4^n}$ を求めよ。

16. 無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ の収束，発散は次のようになる。ただし，$a\neq 0$ とする。

(1)　$|r|<1$ のとき収束して，その和は　$\dfrac{a}{1-r}$

(2)　$|r|\geqq 1$ のとき発散する。

check 16　次の無限等比級数の収束，発散を調べよ。収束するものについてはその和を求めよ。

(1)　$1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

(2)　$(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})+\cdots$

17. 無限級数の収束・発散

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

check 17　次の無限級数は発散することを示せ。

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$$

18. 関数の極限値と四則

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき

(1)　$\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　（k は定数）

(2)　$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

　　$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

(3)　$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　$(\beta\neq 0)$

check 18　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to 2}(2x^3-3x^2+5x)$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x-\sqrt{x+3}}$

19. 関数の極限値と大小関係

(1)　a の近くで $f(x)\leqq g(x)$

かつ $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$

ならば　$\alpha\leqq\beta$

(2)　a の近くで $f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$

かつ $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

ならば　$\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$

（はさみうちの原理）

check 19　$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$ を求めよ。

20. $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ の極限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

check 20　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ を求めよ。

III

21. 関数の連続

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ のとき，
関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続

check 21 次の関数 $f(x)$ は，$x=1$ で連続であることを示せ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & (x \neq 1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$$

22. 中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，
$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対して，$f(c)=m$ となる実数 c が a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。
とくに，$f(a)f(b)<0$ のとき，方程式 $f(x)=0$ は a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

check 22 方程式 $2\sin x - x + 3 = 0$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

微分

23. 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能
$\Longrightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で連続

24. 積・商の導関数

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とくに $\displaystyle\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

check 24 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^3+x-3)(3x+1)$

(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2}$

25. 合成関数の微分法

(1) $y=f(u)$，$u=g(x)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(2) $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

check 25 関数 $y=(2x^2-3)^4$ を微分せよ。

26. 逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \left(\frac{dx}{dy}\neq 0\right)$$

check 26 逆関数の微分法を用いて，関数 $y=\sqrt[5]{x}$ を微分せよ。

27. 媒介変数で表された関数の微分法

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

check 27 x の関数 y が媒介変数 t を用いて
$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=2t+3\end{cases}$ と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

28. 自然対数の底

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e = 2.71828\cdots$$

29. いろいろな関数の導関数

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad$ $(a^x)' = a^x\log a$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ （α は実数）

check 29 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin x^2$

(2) $y=\cos 2x-\tan(3x+1)$

(3) $y=\log|x^2-1|$

(4) $y=\log_{10}|\sin x|$

(5) $y=3^x+2e^{4x}$

微分の応用

30. 接線・法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における

接線の方程式　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

check 30　曲線 $y=\tan x$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

31. 平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

check 31　$a<b$ のとき，平均値の定理を用いて次の不等式を証明せよ。

$$e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$$

32. 極大・極小と微分係数

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であり，かつ $x=a$ において極値をとるならば　$f'(a)=0$

33. 曲線の凹凸の判定

$f''(x)>0$ の区間で $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$ の区間で $y=f(x)$ は上に凸

34. $f''(a)$ の符号と極値

$f'(a)=0,\ f''(a)<0 \Longrightarrow f(a)$ は極大値

$f'(a)=0,\ f''(a)>0 \Longrightarrow f(a)$ は極小値

check 34　第 2 次導関数を利用して，関数 $f(x)=x^2e^x$ の極値を求めよ。

35. 速度・加速度

平面上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における

速度　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

加速度　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

速さ　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

check 35　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=t^2,\qquad y=2t^3-t$$

であるとき，点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{\alpha}$ を求めよ。

また，$t=1$ における速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

36. 関数の値の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

check 36　$x\fallingdotseq 0$ のとき，$e^x\fallingdotseq 1+x$ であることを示せ。

積分とその応用

37. 不定積分

(1)　$\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq -1)$

$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$

$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$

$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$

$\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C,\qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

(2)　置換積分法

$F'(x)=f(x)$ のとき

$\displaystyle\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

$x=g(t)$ のとき

$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

$g(x)=u$ のとき

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$

(3)　部分積分法

$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

check 37　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int(2x-1)^3dx$

⑵ $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

⑶ $\int(\sin x-\cos 2x+3^x)dx$

⑷ $\int x^2\log x\,dx$

38. 定積分

⑴ 置換積分法

$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

⑵ $f(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

$f(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

⑶ 部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

⑷ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$ （a は定数）

check 38

［1］ 次の定積分を求めよ。

⑴ $\int_0^1(2x+1)^3dx$

⑵ $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x\cos x+x^2)dx$

⑶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

［2］ 関数 $F(x)=\int_1^x(x-t)\log 2t\,dt$ のとき，$F''(x)$ を求めよ。

39. 定積分と区分求積法

関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

check 39 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ を求めよ。

III

40. 面積

区間 $[a,\ b]$ において $f(x) \geqq g(x)$ であるとき，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

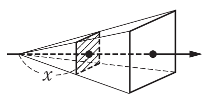
$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

▶check 40　曲線 $y=x^2$ と曲線 $y=\sqrt{x}$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

41. 体積

断面積が $S(x)$ のとき　　$V=\displaystyle\int_a^b S(x)dx$

▶check 41　右の図のような立体があって，底面に平行な平面で切断したとき，頂点からその平面までの距離を x cm とすると，断面は 1 辺が x cm の正方形になるという。この立体の高さが 5 cm のとき，体積 V を，積分を用いて求めよ。



42. 回転体の体積

曲線 $y=f(x)$，2 直線 $x=a$，$x=b$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$$

ただし，$a<b$

▶check 42　曲線 $y=\sqrt{x+1}$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

43. 曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

▶check 43　次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$x=3t^2$，$y=3t-t^3$　$(0 \leqq t \leqq 1)$

(2)　$y=\sqrt{x^3}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$