

法線の方程式は $y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

すなわち $y=-\frac{1}{2}x+1+\frac{\pi}{8}$

check31 関数 $f(x)=e^x$ は実数全体で微分可能であり、
 $f'(x)=e^x$ であるから、区間 $[a, b]$ で平均値の定理を
 用いると

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c, \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する。

$$e^x \text{ は増加関数で、} a < c < b \text{ より} \quad e^a < e^c < e^b$$

$$\text{したがって} \quad e^a < \frac{e^b-e^a}{b-a} < e^b$$

$$b-a > 0 \text{ より} \quad e^a(b-a) < e^b-e^a < e^b(b-a)$$

check34 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x$$

$$=(x^2+4x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{ とおくと} \quad x=0, \quad -2$$

$$f''(0)=2>0$$

$$f''(-2)=-\frac{2}{e^2}<0$$

よって

$$\text{極小値は} \quad f(0)=0$$

$$\text{極大値は} \quad f(-2)=\frac{4}{e^2}$$

check35 $\vec{v}=(2t, \quad 6t^2-1)$

$$\vec{\alpha}=(2, \quad 12t)$$

また、 $t=1$ のとき $\vec{v}=(2, \quad 5)$ であるから

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$$

check36 $f(x)=e^x$ とおくと $f'(x)=e^x$

よって、 $f(0)=1, f'(0)=1$ であるから

$$x \div 0 \text{ のとき} \quad e^x \div 1+x$$

積分とその応用

check37 (1) $\int (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x-1)^4 + C$

$$= \frac{1}{8} (2x-1)^4 + C$$

(2) $x^2+1=t$ とすると $\frac{dt}{dx}=2x$

ゆえに

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

(3) $\int (\sin x - \cos 2x + 3^x) dx$

$$= -\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{3^x}{\log 3} + C$$

(4) $\int x^2 \log x dx = \int \log x \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right)' dx$

$$= \log x \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

check38 [1] (1) $2x+1=t$ すなわち $x=\frac{t-1}{2}$ とおく

と $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

x と t の対応は右の表のように

なる。

よって

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{8} t^4 \right]_1^3$$

$$= 10$$

(2) $\sin x, x \cos x$ は奇関数、 x^2 は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + x \cos x + x^2) dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3} \pi^3$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (-\cos x)' dx$

$$= \left[x(-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos x) dx$$

$$= 0 + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

[2] $F(x)=x \int_1^x \log 2t dt - \int_1^x t \log 2t dt$ であるから

$$F'(x)=\int_1^x \log 2t dt + x \log 2x - x \log 2x$$

$$= \int_1^x \log 2t dt$$

ゆえに $F''(x)=\log 2x$

check39 $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} (2\sqrt{2}-1)$$

check40 曲線 $y=x^2$ と曲線

$y=\sqrt{x}$ との交点の x 座標は、

0, 1 である。

また、区間 $0 \leq x \leq 1$ で

$x^2 \leq \sqrt{x}$ であるから、求める

面積 S は

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

check41 頂点からの距離が x cm のところで、底面と平行

な平面で切断したときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=x^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

よって、求める体積 V は

$$V = \int_0^5 S(x) dx$$

$$= \int_0^5 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^5$$

$$= \frac{125}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

check42 $V = \pi \int_{-1}^0 (\sqrt{x+1})^2 dx$

$$= \pi \int_{-1}^0 (x+1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} (x+1)^2 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

check43 (1) $\frac{dx}{dt}=6t, \quad \frac{dy}{dt}=3-3t^2$ より

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9(t^2+1)^2} = 3(t^2+1)$$

よって、求める曲線の長さ L は

$$L = \int_0^1 3(t^2+1) dt$$

$$= 3 \left[\frac{1}{3} t^3 + t \right]_0^1$$

$$= 4$$

(2) $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ より

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} = \frac{1}{2} \sqrt{9x+4}$$

よって、求める曲線の長さ L は

$$L = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{9x+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (9x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27} (13\sqrt{13}-8)$$

