

数 I

数と式

1. 指数法則

m, n が正の整数のとき
 $a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$

▶check 1 $(-3x^2y)^3 \times \frac{2}{3}x^4y^3$ を計算せよ。

2. 乗法公式・因数分解の公式

- (1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- (4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- (5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- (6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

〔因数分解では左辺と右辺を入れ替え〕

▶check 2 (1) $(2x+y)(3x-4y)$ を展開せよ。

(2) $(x+2y-3z)^2$ を展開せよ。

(3) $12x^2+10x-12$ を因数分解せよ。

3. 実数の分類

実数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \\ \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{array} \right. \\ \text{無理数} \cdots \text{循環しない無限小数} \end{array} \right\} \text{無限小数}$

4. 絶対値

- (1) $a \geq 0$ のとき $|a| = a$
 $a < 0$ のとき $|a| = -a$
- (2) a, b を実数とすると
 $|a| \geq 0$ $|a| = 0$ は $a = 0$ のときに限る。
 $|-a| = |a|, |a|^2 = a^2, |ab| = |a||b|$
 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ただし, $b \neq 0$

▶check 4 次の値を求めよ。

(1) $|-3| - |5|$

(2) $|3-\pi|$

5. 平方根

実数 a に対して $\sqrt{a^2} = |a|$
 $a > 0, b > 0$ のとき
[1] $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ [2] $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
 $m > 0, a > 0$ のとき $\sqrt{m^2a} = m\sqrt{a}$

▶check 5 (1) $\sqrt{(-5)^2}$ の値を求めよ。

(2) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

6. 不等式の性質

- (1) $a < b \Rightarrow a+c < b+c, a-c < b-c$
 - (2) $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
 - (3) $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- (記号 $\Rightarrow$ は, 「ならば」を表す。)

▶check 6 不等式 $\frac{x+6}{2} - \frac{5-x}{5} < 3$ を解け。

7. 絶対値と方程式・不等式 ($a > 0$)

$|x| = a$ の解は $x = \pm a$
 $|x| < a$ の解は $-a < x < a$
 $|x| > a$ の解は $x < -a$ または $a < x$

▶check 7 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x-3| = 7$

(2) $|3-2x| > 4$

2 次関数

8. $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。
軸は直線 $x = p$, 頂点は点 (p, q)

▶check 8 2 次関数 $y = x^2 + 4x$ のグラフの軸と頂点を求め, そのグラフをかけ。

9. $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小

- (i) $a > 0$ ならば, $x = p$ で最小値 q
- (ii) $a < 0$ ならば, $x = p$ で最大値 q

▶check 9 2 次関数 $y = -2x^2 + 4x + 5$ のグラフの軸と頂点を求め, そのグラフをかけ。また, 最大値, 最小値があればそれを求めよ。

10. 2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

▶check 10 次の 2 次方程式を解け。

(1) $2x^2-5x-1=0$

(2) $-3x^2-4x+1=0$

11. 2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac を D とすると

- $D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
- $D=0 \iff$ 1 つの実数解 (重解) をもつ
- $D<0 \iff$ 実数解をもたない
- $D\geq 0 \iff$ 実数解をもつ

▶check 11 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^2-5x+1=0$

(2) $x^2-10x+25=0$

(3) $5x^2+8x+4=0$

12. 2 次不等式の解 ($D>0$)

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 α, β をもつとき, $a>0, \alpha<\beta$ ならば

$ax^2+bx+c>0$ の解は $x<\alpha, \beta<x$

$ax^2+bx+c<0$ の解は $\alpha<x<\beta$

▶check 12 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-2x-8<0$

(2) $x^2-4x-6>0$

13. 2 次不等式の解 ($a>0$ のとき)

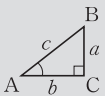
$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の解	異なる 2 つの 実数解 α, β ($\alpha<\beta$)	1 つの 実数解 α (重解)	実数解 なし
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ			
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,$ $\beta<x$	α 以外の すべての 実数	すべての 実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	なし	なし
$ax^2+bx+c\geq 0$ の解	$x\leq \alpha,$ $\beta\leq x$	すべての 実数	すべての 実数
$ax^2+bx+c\leq 0$ の解	$\alpha\leq x\leq \beta$	$x=\alpha$	なし

図形と計量

14. 正弦・余弦・正接

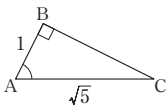
$$\sin A=\frac{a}{c}, \cos A=\frac{b}{c}, \tan A=\frac{a}{b}$$

$$a=c\sin A, b=c\cos A, a=b\tan A$$



▶check 14 右の直角三角形において,

$\sin A, \cos A, \tan A$ の値を求めよ。

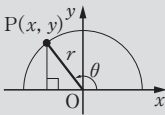


15. 三角比の拡張

$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$ の角 θ について

$$\sin\theta=\frac{y}{r}, \cos\theta=\frac{x}{r},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$



▶check 15 次の三角比の値を求めよ。

(1) $\sin 135^\circ$

(2) $\cos 150^\circ$

(3) $\tan 120^\circ$

16. 三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

▶check 16 $0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ, \cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき, $\sin\theta,$

$\tan\theta$ の値を求めよ。

17. $90^\circ-\theta, 180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

▶check 17 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sin(90^\circ-A)\cos A+\cos(90^\circ-A)\sin A$

(2) $\sin\theta - \cos(180^\circ - \theta)\tan(180^\circ - \theta)$

I

A

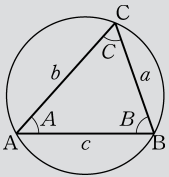
II

B

18. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R は $\triangle ABC$ の外接円の半径



▶check 18 $\triangle ABC$ において、 $b = 6$ 、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ のとき、 a を求めよ。

19. 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

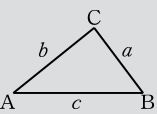
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



▶check 19 (1) $\triangle ABC$ において、 $b = 5$ 、 $c = 2$ 、 $A = 120^\circ$ のとき、 a の値を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ において、 $a = 8$ 、 $b = 13$ 、 $c = 7$ のとき、 B の値を求めよ。

20. 三角形の面積

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

▶check 20 $\triangle ABC$ において、 $a = 4$ 、 $b = 3$ 、 $C = 60^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

データの分析

21. 代表値

平均値 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$
中央値 小さい順に並べたとき、中央の順位にくる値
最頻値 度数分布表に整理したとき、度数が最も大きい階級の階級値

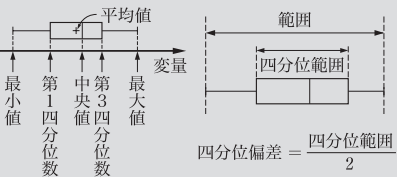
▶check 21 次のデータを小さい順に並べたものである。平均値、中央値、最頻値を求めよ。
13, 14, 17, 18, 18, 18, 18, 21, 22, 23,
23, 25, 25, 26, 27, 28, 28, 30, 30, 30

22. 四分位数

データの値の個数が $2n$ 、もしくは $2n+1$ のとき、データを小さい順に並べかえて
第 1 四分位数……最小値を含む方の n 個のデータの中央値
第 2 四分位数……中央値
第 3 四分位数……最大値を含む方の n 個のデータの中央値

▶check 22 次のデータの第 1 四分位数、第 2 四分位数、第 3 四分位数を求めよ。
12, 33, 17, 23, 21, 6, 14, 34, 18

23. 箱ひげ図



▶check 23 次のデータの箱ひげ図をかけ。
2, 5, 6, 11, 13, 14, 15, 18

24. 分散 s^2 と標準偏差 s

分散 s^2 は
$$s^2 = \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\}$$

標準偏差 s は分散の正の平方根

▶check 24 次のデータは、ある高校の 6 人の身長である。
168 166 156 163 160 171 (単位 cm)
この 6 人の身長の分散と標準偏差を求めよ。

I

A

II

B

25. データの相関

正の相関: x と y の値で一方が増加すると他方も増加
負の相関: x と y の値で一方が増加すると他方が減少

x, y の相関係数 $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + \cdots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})\}$$
$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\}}$$
$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \{(y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \cdots + (y_n - \overline{y})^2\}}$$

▶check 25 下の表は 4 人の生徒の国語と数学のテストの得点である。

	A	B	C	D
国語(点)	4	8	7	5
数学(点)	6	7	8	7

国語の得点と数学の得点の相関係数を、 $\sqrt{5} = 2.24$ として計算せよ。

集合と論証

26. 部分集合

$x \in A$ ならば $x \in B$ のとき、 A を B の部分集合といい、 $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す。

▶check 26 12 の正の約数全体の集合を $A, B = \{2, 3, 6\}$ とするとき、□の中に、 $\in, \notin, \subset, \supset$ のいずれかの記号を入れよ。

$1 \square A, \quad 4 \square A, \quad 8 \square A, \quad A \square B$

27. 共通部分、和集合と補集合

A と B の共通部分は
 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$
 A と B の和集合は
 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$
 A の補集合は $\overline{A} = \{x | x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$

▶check 27 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を全体集合とし、その部分集合を $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 7, 8\}$ とする。このとき、次の集合を求めよ。
(1) $\overline{A}$ (2) $A \cap B$ (3) $\overline{A} \cup B$

28. ド・モルガンの法則 (集合)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

29. 必要条件と十分条件

- ① $p \implies q$ が成り立つとき
 p は q の十分条件, q は p の必要条件
② $p \iff q$ が成り立つとき
 p は q の必要十分条件, q は p の必要十分条件
(または、 p と q は同値であるという)

▶check 29 次の [] にあてはまる適切な文を下のア、イ、ウから選び、記号で答えよ。

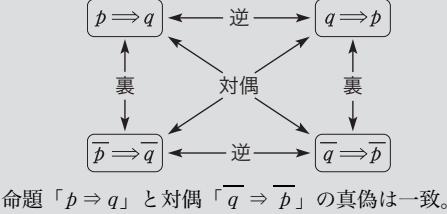
- ア. 十分条件であるが、必要条件ではない
イ. 必要条件であるが、十分条件ではない
ウ. 必要十分条件である

- (1) $x^2 > 0$ は $x > 0$ であるための []
(2) $x = 0$ は $x^2 + x = 0$ の []
(3) $-2 \leq x \leq 2$ は $|x| \leq 2$ であるための []

30. ド・モルガンの法則 (論証)

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$
 $\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

31. 命題の逆・裏・対偶



▶check 31 次の命題の逆、裏および対偶をつくり、その真偽を答えよ。
「 $a = b \implies ac = bc$ 」

数A

場合の数と確率

32. 和集合・補集合の要素の個数

- (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
とくに、 $A \cap B = \phi$ のとき
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
(2) $n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

▶check 32 全体集合 U の部分集合 A, B があり
 $n(U) = 24, n(A) = 7, n(B) = 15, n(A \cap B) = 4$
である。このとき、次の値を求めよ。
(1) $n(A \cup B)$ (2) $n(\overline{A})$

33. 和の法則

2つのことがら A, B について、これらは同時には起こらないとする。 A の起こり方が m 通り、 B の起こり方が n 通りあるとき、 A または B の起こる場合の数は、 $m + n$ 通りである。

▶check 33 大小 2 個のさいころを投げるとき、目の和が 5 または 10 になる場合は何通りあるか。

34. 積の法則

2つのことがら A, B について, A の起こり方が m 通りあり, そのおのおの起こり方に対して B の起こり方が n 通りあるとき, A, B がともに起こる場合の数は, $m \times n$ 通りである。

▶check 34 A 地点から B 地点へ行くのに 3 つの道があり, B 地点から C 地点へ行くのに 4 つの道がある。A 地点から B 地点を通して C 地点に行く方法は何通りあるか。



35. 順列

n 個の異なるものから, r 個とった順列の総数は
$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
とくに ${}_nP_n = n!, {}nP_0 = 1$

▶check 35 6 個の文字 A, B, C, D, E, F がある。このとき, 次の並べ方は何通りあるか。
(1) 3 個を取り出して 1 列に並べる

(2) 6 個すべてを 1 列に並べる

36. 円順列と重複順列

n 個のものの円順列の総数は $(n-1)!$
 n 個のものから r 個とった重複順列の総数は n^r

▶check 36 (1) 5 人が円形に並ぶとき, 何通りの並び方があるか。

(2) 4 人がじゃんけんをするとき, その出し方は何通りあるか。

37. 組合せ

n 個の異なるものから r 個とった組合せの総数は
$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
とくに ${}_nC_0 = {}nC_n = 1, {}nC_r = {}nC_{n-r}$

▶check 37 9 種類のパンから 7 種類を選ぶ方法は何通りあるか。

38. 同じものを含む順列

a が p 個, b が q 個, c が r 個, $\cdots$ の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は
$$\frac{n!}{p!q!r! \cdots} \quad \text{ただし, } p+q+r+\cdots = n$$

▶check 38 1, 1, 1, 2, 2, 3 の 6 個の数字をすべて並べてできる 6 桁の整数の個数を求めよ。

39. 事象の確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

▶check 39 2 個のさいころを同時に投げるとき, 目の和が 9 になる確率を求めよ。

40. 確率の基本性質

- (1) 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) 全事象 U の確率 $P(U) = 1$
- (3) 空事象 ϕ の確率 $P(\phi) = 0$
- (4) 事象 A と B が排反事象のとき
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{加法定理})$$

▶check 40 赤球 4 個と白球 6 個が入っている袋から, 同時に 2 個の球を取り出すとき, それらが同じ色である確率を求めよ。

41. 和事象の確率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

▶check 41 1 から 100 までの番号を 1 つずつ書いた 100 枚のカードがある。この中から, 1 枚のカードを引くとき, その番号が 6 の倍数または 9 の倍数である確率を求めよ。

42. 余事象の確率

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

▶check 42 5 枚の硬貨を同時に投げるとき, 少なくとも 1 枚は表が出る確率を求めよ。

43. 独立な試行の確率

2 つの試行 T_1, T_2 が独立であるとき, T_1 で事象 A が起こり, T_2 で事象 B が起こる確率は
$$P(A) \times P(B)$$

▶check 43 さいころを続けて 2 回投げるとき, 1 回目に 4 以下の目が出て, 2 回目に 5 以上の目が出る確率を求めよ。

44. 反復試行の確率

ある試行において, 事象 A が起こる確率を p , その余事象の確率を $q = 1 - p$ とする。この試行を n 回くり返す反復試行において, 事象 A がちょうど r 回起こる確率は
$${}_nC_rp^rq^{n-r} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$$
ただし, $p^0 = 1, q^0 = 1$ とする。

▶check 44 1 個のさいころを 5 回投げるとき, 5 以上の目がちょうど 3 回出る確率を求めよ。

図形の性質

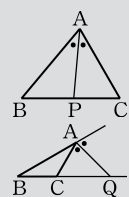
54. 内角, 外角の二等分線と比

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると

$$BP:PC = AB:AC$$

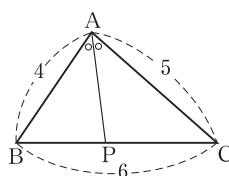
$\triangle ABC$ の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると

$$BQ:QC = AB:AC$$



▶check 54 $\triangle ABC$ において,

AB, BC, CA の長さをそれぞれ 4, 6, 5 とする。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき, PC の長さを求めよ。



55. 三角形の重心・外心・垂心・内心

(重心) 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点はそれぞれの中線を 2:1 に内分する。

(外心) 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

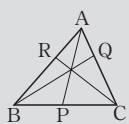
(垂心) 三角形の各頂点から対辺, またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる。

(内心) 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

56. チェバの定理

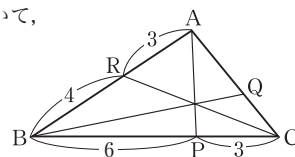
$\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり, 3 直線 AP, BQ, CR が 1 点で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



▶check 56 右の図において,

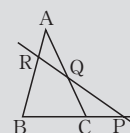
$AQ:QC$ を求めよ。



57. メネラウスの定理

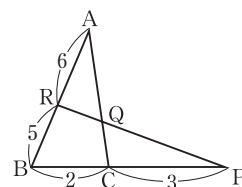
ある直線が $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB , またはその延長と, それぞれ点 P, Q, R で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



▶check 57 右の図において,

$AQ:QC$ を求めよ。



58. 三角形の辺の大小と角の大小

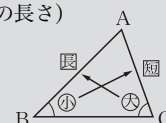
(1) 三角形の 3 辺の長さの関係

(2 辺の長さの和) > (他の 1 辺の長さ)

(2) 三角形の辺と角の大小関係

$\triangle ABC$ において

$$AB > AC \iff \angle C > \angle B$$

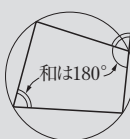


59. 円に内接する四角形

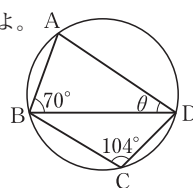
円に内接する四角形では

(1) 対角の和は 180° である。

(2) 外角は, それと隣り合う内角の対角に等しい。



▶check 59 右の図で, 角 θ を求めよ。



60. 四角形が円に内接する条件

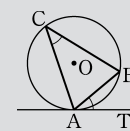
次の (1), (2) のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

(1) 1 組の対角の和が 180° である。

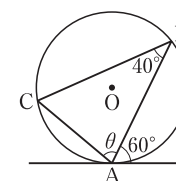
(2) 1 つの外角が, それと隣り合う内角の対角に等しい。

61. 接線と弦のつくる角 (接弦定理)

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は, その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

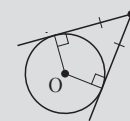


▶check 61 右の図で, AT は円の接線, A は接点である。角 θ を求めよ。



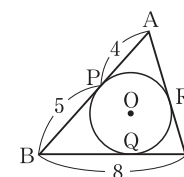
62. 接線の長さ

円外の 1 点からその円に引いた 2 本の接線において, その点から 2 つの接点までの距離は等しい。



▶check 62 右の図で, 円 O は

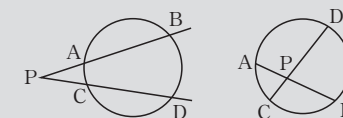
$\triangle ABC$ の内接円で, 点 P, Q, R は接点である。辺 AC の長さを求めよ。



63. 方べきの定理

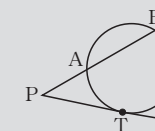
(1) 点 P を通る 2 直線が, 円 O とそれぞれ 2 点 A, B と 2 点 C, D で交わりとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

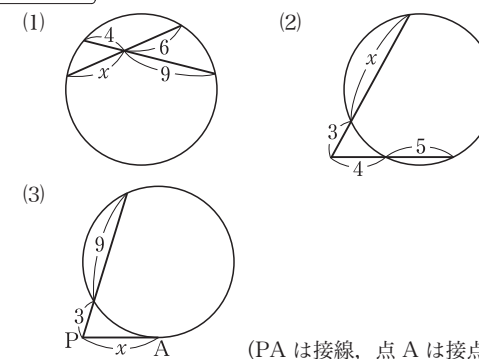


(2) 点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A, B で交わり, もう一方が点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



▶check 63 下の図で, x を求めよ。



数Ⅱ

方程式・式と証明

64. 3 次乗公式・因数分解

(1) 乗公式

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(2) 因数分解

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

▶check 64 (1) $(x - 3y)^3$ を展開せよ。

(2) $16x^4 + 2xy^3$ を因数分解せよ。

65. 二項定理

$(a + b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_{n-1}a^1b^{n-1} + {}_nC_nb^n$

▶check 65 二項定理を用いて、 $(x + 2)^5$ を展開せよ。

66. 整式の除法

整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q 、余りを R とすると

$A = BQ + R$, R の次数 $< B$ の次数

▶check 66 $x^3 - 2x + 4$ を $x^2 - 2x + 2$ で割った商と余りを求めよ。

67. 複素数の相等

a, b, c, d が実数であるとき

$a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d$

とくに $a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ かつ } b = 0$

▶check 67 次の等式を満たす実数 x, y を求めよ。
 $(1 + 2i)x + (2 - i)y = -4 + 7i$

68. 2 次方程式

(1) 解の公式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(2) 判別式と解の種類

判別式 $D = b^2 - 4ac$ について

$D > 0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D = 0 \iff$ 重解をもつ

$D < 0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

(3) 解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると

① $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

② $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

▶check 68 (1) 2 次方程式 $x^2 + kx + k = 0$ が異なる 2 つの虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 2 次方程式 $2x^2 + 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

(3) $2x^2 - 4x + 6$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

69. 高次方程式

(1) 剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ である。

(2) 因数定理

整式 $P(x)$ が $x - \alpha$ を因数にもつ $\iff P(\alpha) = 0$

▶check 69 (1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ を $x - 2$ で割った余りを求めよ。

(2) $3x^3 - ax^2 + x + 2$ が $x + 2$ で割り切れるように、定数 a の値を求めよ。

70. 恒等式

$P(x) = Q(x)$ が x についての恒等式

$\iff P(x), Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致

▶check 70 $(x + 2)(ax + b) = x^2 + c$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

71. 不等式

(1) 大小の判定 $a > b \iff a - b > 0$

(2) 実数の 2 乗 $a^2 \geq 0$

とくに $a^2 = 0 \iff a = 0$

(3) 相加平均と相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは、 $a = b$ のときである。

(4) 正の数の大小と 2 乗

$A > 0, B > 0$ のとき $A \geq B \iff A^2 \geq B^2$

▶check 71 次の等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

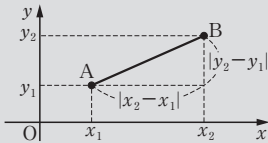
(1) $x^2 + 9 \geq 6x$

(2) $a > 0$ のとき、 $a + \frac{4}{a} \geq 4$

図形と方程式

72. 2点間の距離

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ において
 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



▶check 72 $A(2, -4), B(-1, 5)$ のとき, AB を求めよ。

73. 内分点・外分点・重心の座標

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ において

(1) 線分 AB を $m:n$ に内分する点
 $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$

(2) 線分 AB を $m:n$ に外分する点
 $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n} \right)$

(3) $\triangle ABC$ の重心
 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

▶check 73 $A(2, -4), B(-1, 5), C(2, 5)$ について

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標を求めよ。

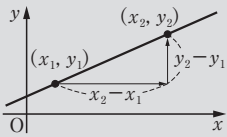
(2) 線分 AB を $2:1$ に外分する点の座標を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の重心の座標を求めよ。

74. 直線の方程式

(1) 点 (x_1, y_1) を通り, 傾き m の直線の方程式
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

(2) 2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式
 $x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$



$x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$

▶check 74 次の2点 $A(2, 4), B(5, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ。

75. 2直線の平行条件・垂直条件

2直線 $y = mx + n, y = m'x + n'$ について

平行条件 $m = m'$

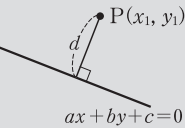
垂直条件 $mm' = -1$

▶check 75 点 $A(1, 4)$ を通り, 直線 $y = 2x + 1$ に平行な直線および垂直な直線の方程式を求めよ。

76. 点と直線の距離

点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

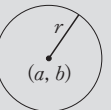


▶check 76 点 $A(1, 4)$ と直線 $y = 2x + 1$ の距離 d を求めよ。

77. 円の方程式

中心 (a, b) , 半径 r の円の方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



▶check 77 $A(3, 3), B(-1, 5)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

78. 円の接線

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式

$$x_1x + y_1y = r^2$$

▶check 78 円 $x^2 + y^2 = 25$ において, 円周上にある点 $A(3, -4)$ における接線の方程式を求めよ。

79. 不等式の表す領域

(1) 直線 $y = mx + n$ を l とすると
 $y > mx + n$ の表す領域は l の上側
 $y < mx + n$ の表す領域は l の下側

(2) 円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を C とすると
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は C の内部
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は C の外部

▶check 79 次の不等式が表す領域を図示せよ。

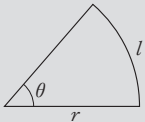
(1) $2x - 3y + 6 < 0$

(2) $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$

三角関数

80. 弧度法と扇形

- (1) 1 ラジアン = $\frac{180^\circ}{\pi}$, $180^\circ = \pi$ ラジアン
- (2) 扇形の弧の長さ l と面積 S と
- 半径 r , 中心角 θ (ラジアン) の扇形の弧の長さを l , 面積を S とすると
- $$l = r\theta, S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



▶check 80 半径が 4, 中心角 60° の扇形の弧の長さ l と, 面積 S を求めよ。

81. 三角関数の相互関係

- (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (2) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- (3) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

▶check 81 θ が第 3 象限の角で, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

82. 三角関数の性質

- (1) $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$ $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$
 $\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$
- (2) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$
 $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- (3) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$
 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$
- (4) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
 $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

83. 正弦・余弦・正接の加法定理

- (1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- (2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- (3) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

▶check 83 $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ であることを用いて, $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\tan 75^\circ$ の値を求めよ。

84. 2 倍角の公式, 半角の公式

2 倍角の公式

- (1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- (2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
 $= 2\cos^2\alpha - 1$
- (3) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

半角の公式

- (1) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ (2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$
- (3) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

▶check 84 次の問に答えよ。

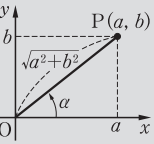
- (1) α が第 2 象限の角で, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

- (2) $\sin 67.5^\circ$, $\cos 67.5^\circ$ の値を求めよ。

85. 三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



▶check 85 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。

指数関数・対数関数

86. 有理数を指数とする累乗
 $a > 0, m, n$ は正の整数のとき
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

87. 指数法則
 $a > 0, b > 0, p, q$ は有理数のとき
(1) $a^p a^q = a^{p+q}$ (1)' $a^p \div a^q = a^{p-q}$
(2) $(a^p)^q = a^{pq}$
(3) $(ab)^p = a^p b^p$ (3)' $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

▶check 87 次の計算をせよ。ただし、 $a > 0$ とする。

(1) $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$

(3) $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[6]{25}$

88. 指数関数の大小関係
(1) $a > 1$ のとき $p < q \iff a^p < a^q$
(2) $0 < a < 1$ のとき $p < q \iff a^p > a^q$

▶check 88 次の数の大小を比較せよ。

(1) $\sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{32}$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{27}$

89. 対数と指数
 $a > 0, a \neq 1, M > 0$ のとき
$$\log_a M = p \iff a^p = M$$

▶check 89 次の等式を満たす M, a の値を求めよ。

(1) $\log_4 M = 3$

(2) $\log_a 32 = 5$

90. 対数関数の大小関係
① $a > 1$ のとき $p < q \iff \log_a p < \log_a q$
② $0 < a < 1$ のとき $p < q \iff \log_a p > \log_a q$

▶check 90 次の各組の数を小さい順に並べよ。

(1) $\log_2 3, \log_2 \sqrt{5}, \log_2 \frac{7}{2}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 3, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}, 0$

91. 対数の公式
 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ のとき
(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
(3) $\log_a M^r = r \log_a M$ (r は実数)
 a, b, c は正の数, $a \neq 1, c \neq 1$ のとき
(4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (底の変換公式)

▶check 91 次の計算をせよ。

(1) $6 \log_3 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_3 2 + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3}$

(2) $\log_2 3(\log_9 2 + \log_{27} 2)$

92. 常用対数
(1) 整数部分が n 桁の数 x
$$\iff 10^{n-1} \leq x < 10^n \iff n-1 \leq \log_{10} x < n$$

(2) 小数第 n 位にはじめて 0 でない数字が現れる数 x
$$\iff 10^{-n} \leq x < 10^{-n+1} \iff -n \leq \log_{10} x < -n+1$$

▶check 92 次の問に答えよ。

(1) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。 2^{50} の桁数を求めよ。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$ は小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

微分と積分

93. 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

▶check 93 導関数の定義にしたがって、関数 $f(x) = 2x^2 + 3x$ を微分せよ。

94. x^n の導関数

n が正の整数のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$

95. 導関数の公式

- (1) c が定数で $y = c$ ならば $y' = 0$
- (2) k が定数で $y = kf(x)$ ならば $y' = kf'(x)$
- (3) $y = f(x) + g(x)$ ならば $y' = f'(x) + g'(x)$
- (4) $y = f(x) - g(x)$ ならば $y' = f'(x) - g'(x)$

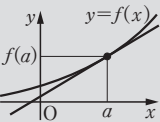
▶check 95 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{2}{5}$

(2) $y = (2x - 3)(x^2 - 2x + 4)$

96. 接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$



▶check 96 関数 $y = x^3 - 4x + 3$ のグラフ上の点 A(2, 3) における接線の方程式を求めよ。

97. 関数の増減と極大・極小

- (1) ある区間で
つねに $f'(x) > 0$ ならば、
 $f(x)$ はその区間で増加
つねに $f'(x) < 0$ ならば、
 $f(x)$ はその区間で減少
- (2) $f'(a) = 0$ となる $x = a$ を境にして
 $f'(x)$ が正から負に変われば、 $f(a)$ は極大値
 $f'(x)$ が負から正に変われば、 $f(a)$ は極小値

▶check 97 関数 $y = -x^3 + 3x + 2$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

98. 定積分

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

99. 定積分の性質

- (1) $\int_a^a f(x)dx = 0$
- (2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- (3) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

▶check 99 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 (3x^2 + 2x - 1)dx + \int_1^2 (3x^2 + 2x - 1)dx$

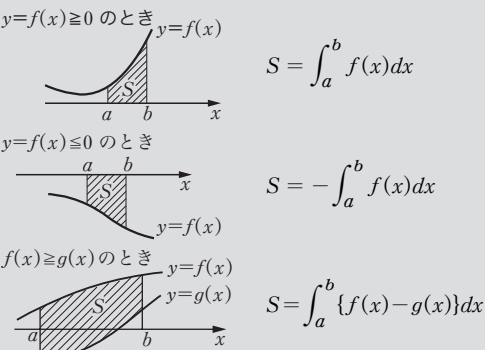
(2) $\int_1^3 (x^2 + 3x)dx + \int_3^1 (3x - 2x^2)dx$

100. 定積分と微分

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

▶check 100 関数 $f(x) = \int_2^x (t^2 + 3t + 1)dt$ を微分せよ。

101. 定積分と面積



▶check 101 次の図形の面積を求めよ。

- (1) 放物線 $y = 3x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$, $x = 2$ で囲まれた図形

- (2) 放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた図形

数B

数列

102. 等差数列

初項 a ，公差 d ，項数 n ，末項 l のとき

(1) 一般項 a_n $a_n = a + (n - 1)d$

(2) 和 S_n $S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$
 $= \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$

(3) a, b, c がこの順に等差数列 $\iff 2b = a + c$

▶check 102 初項 3，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の第 20 項が 79 であるとき， d の値を求めよ。また，この数列の初項から第 30 項までの和 S_{30} を求めよ。

103. 等比数列

初項 a ，公比 r ，項数 n のとき

(1) 一般項 a_n $a_n = ar^{n-1}$

(2) 和 S_n $r \neq 1$ のとき
 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$
 $r = 1$ のとき $S_n = na$

(3) a, b, c がこの順に等比数列 $\iff b^2 = ac$

▶check 103 初項 a ，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の第 4 項が 54 であるとき， a の値を求めよ。また，この数列の初項から第 6 項までの和 S_6 を求めよ。

104. いろいろな数列

(1) 累乗の和

$$\sum_{k=1}^n c = nc \quad (c \text{ は定数})$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

(2) 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

(3) 数列の和と一般項

$$a_1 = S_1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

▶check 104 (1) $\sum_{k=1}^n (k+1)(k-3)$ を計算せよ。

(2) 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
1, 3, 7, 13, 21, 31, …

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4n^2$ であるとき，一般項を求めよ。

(3) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2n^2$

105. 漸化式

(1) 前の項から，その次に続く項を定める規則を式で表したものを 漸化式 という。

(2) 基本的な漸化式

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (d \text{ は定数}) \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{n+1} = ra_n \quad (r \text{ は定数}) \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n) \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

▶check 105 次のように定められた数列の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4$

(2) $a_1 = 3, a_{n+1} = -2a_n$

106. 数学的帰納法

自然数 n に関する命題が，すべての自然数 n に対して成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを証明すればよい。

〔1〕 $n = 1$ のとき成り立つ。

〔2〕 $n = k$ のとき成り立つと仮定すると，
 $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

▶check 106 n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

ベクトル

107. ベクトルの加法

- (1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- (2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- (3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

108. ベクトルの実数倍

- (1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- (2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- (3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

▶check 108 次の式を満たす $\vec{x}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

$$\frac{1}{2}(\vec{b} - 3\vec{x}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{x})$$

109. ベクトルの成分

- $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき
- (1) 大きさ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
 - (2) 成分による演算
 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
 $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$ k は実数

▶check 109 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ のとき, $|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ。

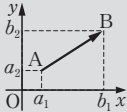
110. ベクトルの平行

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき
 $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある

▶check 110 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (x, 3)$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるように x の値を求めよ。

111. 座標と成分表示

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ のとき
 $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$



▶check 111 3 点 A(3, 2), B(1, -2), C(6, 1) がある。
四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

112. ベクトルの内積

- (1) 内積の定義 ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$
- (2) 内積の成分表示
 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- (3) ベクトルの垂直と内積
 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 $\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$
- (4) ベクトルのなす角
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
 $= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

▶check 112 (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = (6, x)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(2) $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1)$ のなす角 θ を求めよ。

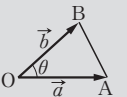
113. 位置ベクトル

- (1) 分点の位置ベクトル
2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P, $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ は
 $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$, $\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}$
- (2) 2 点 A, B が異なるとき
3 点 A, B, C が一直線上にある
 $\iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある

▶check 113 2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) に対して, 線分 AB を 4:3 に内分する点 P, および外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

114. $\triangle OAB$ の面積

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると
面積 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$
とくに $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき
 $S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$



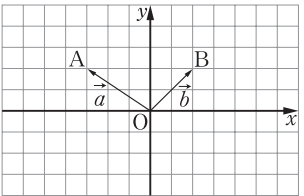
▶check 114 3 点 A(2, -1), B(5, 0), C(4, 5) を頂点とする三角形 ABC の面積 S を求めよ。

115. ベクトル方程式

- (1) 点 A($\vec{a}$) を通り, $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線
 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$
- (2) 2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る直線
 $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$
 $= s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s+t=1)$

▶check 115 (1) 点 A(3, -1) を通り, $\vec{u} = (2, 3)$ を方向ベクトルとする直線を媒介変数を用いて表せ。また, 媒介変数を消去して直線の方程式を表せ。

(2) 下の 2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について, t が実数全体を動くとき, $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + 2t\vec{b}$ を満たす点 P($\vec{p}$) が動く軌跡を図示せよ。



まとめ&check

116. 空間における4点A, B, C, Dが同一平面上にある条件
空間における4点A, B, C, Dが同一平面上にある
 $\iff \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ となる実数 m, n がある

▶check 116 空間における次の4点A, B, C, Dが同一平面上にあるように、 t の値を定めよ。
A(0, 2, 2), B(6, 4, -1),
C(4, 0, 3), D(-2, 8, t)

117. 球の方程式
原点を中心とする半径 r の球
 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
▶check 117 点A(6, -1, -2)を中心とし、
点B(4, 0, -4)を通る球の方程式を求めよ。