まとめ&check

数 I

数と式

check1　$(-3x^2y)^3\times\frac{2}{3}x^4y^3$

$=-27x^6y^3\times\frac{2}{3}x^4y^3$

$=\boldsymbol{-18x^{10}y^6}$

check2　(1)　$(2x+y)(3x-4y)$

$=6x^2+(-8+3)xy-4y^2$

$=\boldsymbol{6x^2-5xy-4y^2}$

(2)　$(x+2y-3z)^2$

$=x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y(-3z)$

$+2(-3z)\cdot x$

$=\boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6zx}$

(3)　$12x^2+10x-12$

$=2(6x^2+5x-6)$

$=\boldsymbol{2(3x-2)(2x+3)}$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & \underline{\ \ 9} \\ & & & & 5 \end{array}$$

check4　(1)　$|-3|-|5|=3-5=\boldsymbol{-2}$

(2)　$3-\pi<0$ であるから

$|3-\pi|=-(3-\pi)=\boldsymbol{\pi-3}$

check5　(1)　$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=\boldsymbol{5}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}}$

check6　両辺に 10 をかけて

$5(x+6)-2(5-x)<30$

$5x+30-10+2x<30$

$7x<10$

$\boldsymbol{x<\dfrac{10}{7}}$

check7　(1)　$|x-3|=7$ より　$x-3=\pm 7$

$x-3=7$ より　$x=10$

$x-3=-7$ より　$x=-4$

よって　$\boldsymbol{x=-4,\ 10}$

(2)　$|3-2x|>4$

$|2x-3|>4$ より　$2x-3<-4$，$4<2x-3$

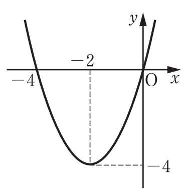
よって　$\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}<x}$

2次関数

check8　$y=x^2+4x$

$=(x+2)^2-2^2$

$=(x+2)^2-4$



よって，

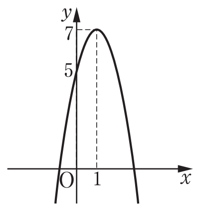
軸は　直線 $\boldsymbol{x=-2}$

頂点は　点 $\boldsymbol{(-2,\ -4)}$

グラフは右の図。

check9　$y=-2x^2+4x+5$

$=-2(x-1)^2+7$



よって，軸は　直線 $\boldsymbol{x=1}$

頂点は　点 $\boldsymbol{(1,\ 7)}$

グラフは右の図。

$x=1$ のとき 最大値 **7**

最小値なし

check10　(1)　$2x^2-5x-1=0$ より

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}}$

(2)　$3x^2+4x-1=0$ より

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-3(-1)}}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}}$

check11　(1)　$2x^2-5x+1=0$

$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1$

$=17>0$

であるから，実数解は **2** 個

(2)　$x^2-10x+25=0$

$D=(-10)^2-4\cdot 1\cdot 25$

$=0$

であるから，実数解は **1** 個

(3)　$5x^2+8x+4=0$

$D=8^2-4\cdot 5\cdot 4$

$=-16<0$

であるから，実数解は **0** 個

check12　(1)　$x^2-2x-8=0$ を解くと

$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$

よって，求める 2 次不等式の解は

$\boldsymbol{-2<x<4}$

(2)　$x^2-4x-6=0$ を解くと

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}$

$=\dfrac{4\pm 2\sqrt{10}}{2}$

$=2\pm\sqrt{10}$

よって，求める 2 次不等式の解は

$\boldsymbol{x<2-\sqrt{10},\ 2+\sqrt{10}<x}$

図形と計量

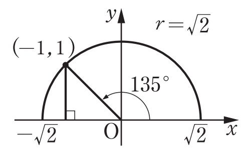
check14　$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2$

$=(\sqrt{5})^2-1^2=4$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=2$

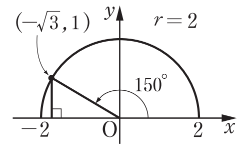
よって　$\sin A=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$　$\cos A=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$　$\tan A=\boldsymbol{2}$

check15　(1)



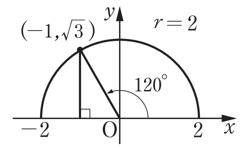
$\sin 135^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2)



$\cos 150^\circ=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3)



$\tan 120^\circ=\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

check16　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$\sin\theta\geqq 0$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\div\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

check17　(1)　$\sin(90^\circ-A)=\cos A$，$\cos(90^\circ-A)=\sin A$，

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ であるから

$\sin(90^\circ-A)\cos A+\cos(90^\circ-A)\sin A$

$=\cos^2 A+\sin^2 A$

$=\boldsymbol{1}$

(2)　$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$，$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

であるから

$\sin\theta-\cos(180^\circ-\theta)\tan(180^\circ-\theta)$

$=\sin\theta-(-\cos\theta)(-\tan\theta)$

$=\sin\theta-\cos\theta\tan\theta$

$=\sin\theta-\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\sin\theta-\sin\theta$

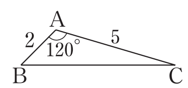
$=\boldsymbol{0}$

check18　正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{6\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=6\times\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=3\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

check19　(1)　余弦定理により

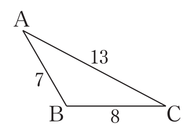


$a^2=5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2\cos 120^\circ$

$=39$

$a>0$ より　$a=\boldsymbol{\sqrt{39}}$

(2)　余弦定理により



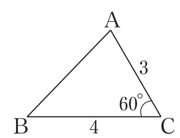
$\cos B=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 8}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$ より

$B=\boldsymbol{120^\circ}$

check20　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin 60^\circ$

$=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$



データの分析

check21　20 個のデータの総和は　454

よって平均値は　$\dfrac{454}{20}=\boldsymbol{22.7}$

中央値は　$\dfrac{23+23}{2}=\boldsymbol{23}$

最頻値は　**18**

check22　データを小さい順に並べると

6，12，14，17，18，21，23，33，34

であるから

第 1 四分位数は　$\dfrac{12+14}{2}=\boldsymbol{13}$

第 2 四分位数は　**18**

第 3 四分位数は　$\dfrac{23+33}{2}=\boldsymbol{28}$

check23　最小値は　2

第 1 四分位数は　$\dfrac{5+6}{2}=5.5$

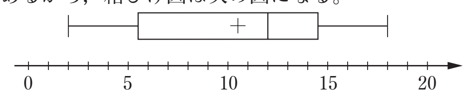
第 2 四分位数は　$\dfrac{11+13}{2}=12$

第 3 四分位数は　$\dfrac{14+15}{2}=14.5$

最大値は　18

平均値は　10.5

であるから，箱ひげ図は次の図になる。



check24　平均値　$\overline{x}=\dfrac{168+166+156+163+160+171}{6}$

$=\dfrac{984}{6}=164$ (cm)

$S^2=\dfrac{1}{6}\{(168-164)^2+(166-164)^2+(156-164)^2$

$+(163-164)^2+(160-164)^2+(171-164)^2\}$

$=\dfrac{150}{6}=25$

$S=\sqrt{25}=5$

よって，分散は **25**，標準偏差は **5 (cm)**

check25　国語の平均値　$\overline{x}=\dfrac{4+8+7+5}{4}=6$ (点)

数学の平均値　$\overline{y}=\dfrac{6+7+8+7}{4}=7$ (点)

	x	y	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	4	6	−2	4	−1	1	2
B	8	7	2	4	0	0	0
C	7	8	1	1	1	1	1
D	5	7	−1	1	0	0	0
計	24	28		10		2	3

$s_x=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$s_y=\sqrt{\dfrac{2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$s_{xy}=\dfrac{3}{4}$

よって相関係数 r は

$r=\dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{5}$

$=\boldsymbol{0.672}$

集合と論証

check26　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ であるから

$1\in A,\ 4\in A,\ 8\notin A,\ A\supset B$

check27　(1)　$\overline{A}=\{\mathbf{2,\ 4,\ 6,\ 8}\}$

(2)　$A\cap B=\{\mathbf{1,\ 7}\}$

(3)　$\overline{A}\cup B=\{\mathbf{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8}\}$

check29　(1)　「$x^2>0$ ならば $x>0$」は成り立たない。

（反例　$x=-1$）

「$x>0$ ならば $x^2>0$」は成り立つ。

よって　イ

(2)　$x^2+x=0$ を解くと

$x(x+1)=0$ より，$x=0,\ -1$

「$x=0\Longrightarrow x^2+x=0$」は成り立つ。

「$x^2+x=0\Longrightarrow x=0$」は成り立たない。

（反例　$x=-1$）

よって　ア

(3)　$|x|\leqq 2$ を解くと　$-2\leqq x\leqq 2$

「$-2\leqq x\leqq 2\Longrightarrow |x|\leqq 2$」と

「$|x|\leqq 2\Longrightarrow -2\leqq x\leqq 2$」がともに成り立つ。

よって　ウ

check31　逆「$\boldsymbol{ac=bc\ \Longrightarrow\ a=b}$」

偽（反例　$a=1,\ b=2,\ c=0$）

裏「$\boldsymbol{a\neq b\ \Longrightarrow\ ac\neq bc}$」

偽（反例　$a=1,\ b=2,\ c=0$）

対偶「$\boldsymbol{ac\neq bc\ \Longrightarrow\ a\neq b}$」

真

数A

場合の数と確率

check32　(1)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=7+15-4$

$=\mathbf{18}$

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=24-7$

$=\mathbf{17}$

check33　大きいさいころで a，小さいさいころで b の目が出たことを $(a,\ b)$ で表すとする。

(i)　目の和が 5 になる場合

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$　の 4 通り

(ii)　目の和が 10 になる場合

$(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$　の 3 通り

(i) と (ii) は同時には起こらないから，求める場合の数は，和の法則により

$4+3=\mathbf{7}$（通り）

check34　A 地点から B 地点へ行くための道の選び方は 3 通りあり，それぞれの選び方に対して B 地点から C 地点へ行くための道の選び方は 4 通りずつある。したがって，A 地点から B 地点を通って C 地点に行く方法は，積の法則により

$3\times 4=\mathbf{12}$（通り）

check35　(1)　異なる 6 個の文字から 3 個を取り出して 1 列に並べる方法は

${}_6\mathrm{P}_3=6\cdot 5\cdot 4=\mathbf{120}$（通り）

(2)　異なる 6 個の文字すべてを 1 列に並べる方法は

$6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=\mathbf{720}$（通り）

check36　(1)　5 人の円順列より

$(5-1)!=\mathbf{24}$（通り）

(2)　4 人の出し方はすべて 3 通りずつであるから

$3^4=\mathbf{81}$（通り）

check37　9 個のものから 7 個とる組合せであるから

${}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{{}_9\mathrm{P}_2}{2!}=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=\mathbf{36}$（通り）

check38　1 が 3 個，2 が 2 個，3 が 1 個の合計 6 個並べるから

$\dfrac{6!}{3!2!1!}=\mathbf{60}$（通り）

check39　2 個のさいころを A, B とし，その目 a, b を $(a,\ b)$ と表記する。起こり得るすべての場合の数は

$6\times 6=36$（通り）

目の和が 9 になるのは

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$　の 4 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

check40　2 個とも赤である事象を A，2 個とも白である事象を B とすると，2 個とも同じ色である事象は $A\cup B$ で表される。

事象 A，B の確率を求めると

$P(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{15}$，$P(B)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$

A，B は互いに排反であるから，求める確率は，加法定理により

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{7}{15}}$

check41　6 の倍数である事象を A，9 の倍数である事象を B とすると，6 または 9 の倍数である事象は $A\cup B$ と表される。

$A=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 90,\ 96\}$，$n(A)=16$

$B=\{9,\ 18,\ 27,\ \cdots,\ 90,\ 99\}$，$n(B)=11$

$A\cap B=\{18,\ 36,\ \cdots,\ 72,\ 90\}$，$n(A\cap B)=5$

であるから

$P(A)=\dfrac{16}{100}$，$P(B)=\dfrac{11}{100}$，$P(A\cap B)=\dfrac{5}{100}$

A と B は排反でないから，求める確率は

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{16}{100}+\dfrac{11}{100}-\dfrac{5}{100}=\mathbf{\dfrac{11}{50}}$

check42　5 枚とも裏が出る事象を A とおくと，求める事象は $\overline{A}$ となるから

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{2^5}=\mathbf{\dfrac{31}{32}}$

check43　さいころを投げる試行は独立であるから，求める確率は

$\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{6}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$

check44　1 個のさいころを投げるとき，5 以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

5 回のうち，5 以上の目が 3 回出るときその確率は

${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{40}{243}}$

check45　(1)　1 回目に赤球を取り出す事象を A，2 回目に赤球を取り出す事象を B とすると，求める確率は

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{7}=\mathbf{\dfrac{5}{14}}$

(2)　求める確率は

$P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{7}=\mathbf{\dfrac{15}{56}}$

整数の性質

check46　$(a,\ b)=(\mathbf{1,\ 8}),\ (\mathbf{2,\ 4}),\ (\mathbf{4,\ 2}),\ (\mathbf{8,\ 1}),$

$(\mathbf{-1,\ -8}),\ (\mathbf{-2,\ -4}),\ (\mathbf{-4,\ -2}),\ (\mathbf{-8,\ -1})$

check48　$300=2^2\times 3\times 5^2$

$792=2^3\times 3^2\times 11$

よって，最大公約数は　$2^2\times 3=\mathbf{12}$

最小公倍数は　$2^3\times 3^2\times 5^2\times 11=\mathbf{19800}$

check49　a を 12 で割ったときの商を q とすると，余りが 9 であるから　$a=12q+9$

このとき　$a=4(3q+2)+1$

ここで，q は整数であるから，$3q+2$ は整数である。

よって，a を 4 で割ったときの余りは　$\mathbf{1}$

check50　整数 n を 6 で割った余りで分類すると

$\boldsymbol{n=6k,\ n=6k+1,\ n=6k+2,\ n=6k+3,}$

$\boldsymbol{n=6k+4,\ n=6k+5}$（$\boldsymbol{k}$ は整数）

check51　$714=203\times 3+105$

$203=105\times 1+98$

$105=98\times 1+7$

$98=7\times 14$

よって，714 と 203 の最大公約数は $\mathbf{7}$

check52　$11010_{(2)}$

$=1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+0$

$=\mathbf{26}$

$342_{(5)}$

$=3\times 5^2+4\times 5+2$

$=\mathbf{97}$

check53　(1)，(2) は既約分数である。

(1) の分母は　$80=2^4\times 5$　であるから **有限小数** である。

(2) の分母は　$96=2^5\times 3$　であるから **循環小数** である。

図形の性質

check54　$\mathrm{PC}=x$ とおくと，$\mathrm{BP}=6-x$

内角の二等分線と比の関係から

$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$

$(6-x):x=4:5$

$4x=5(6-x)$

$4x=30-5x$

$9x=30$

$x=\dfrac{10}{3}$

よって　$\mathrm{PC}=\mathbf{\dfrac{10}{3}}$

check56　チェバの定理より

$\dfrac{6}{3}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\dfrac{3}{4}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=\mathbf{3:2}$

check57　メネラウスの定理より

$\dfrac{5}{3}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\dfrac{6}{5}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=\mathbf{2:1}$

check59　$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-104^\circ=76^\circ$

よって　$\theta=180^\circ-(70^\circ+76^\circ)$

$=\mathbf{34^\circ}$

check61　接弦定理より

$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

よって　$\theta=180^\circ-(40^\circ+60^\circ)$

$=\mathbf{80^\circ}$

check62　$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}=4$

$\mathrm{BQ}=\mathrm{BP}=5$ より　$\mathrm{CQ}=3$

よって　$\mathrm{CR}=\mathrm{CQ}=3$

したがって

$\mathrm{AC}=\mathrm{AR}+\mathrm{CR}$

$=4+3=\mathbf{7}$

check63　(1)　方べきの定理より

$4\times 9=x\times 6$

$x=\mathbf{6}$

(2)　方べきの定理より

$3\times(3+x)=4\times 9$

$x=\mathbf{9}$

(3)　方べきの定理より

$x^2=3\times 12$

$=36$

$x>0$ より　$x=\mathbf{6}$